

نام و نام خانوادگی:

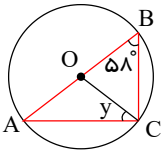
زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی نهم فصل سوم تستی

تاریخ آزمون:



۱ مثلث‌های AOC و COB در داخل دایره‌ای به مرکز O رسم شده‌اند. خط AOB هم خطی مستقیم است. در صورتی که $\widehat{OBC} = 58^\circ$ باشد، اندازه \widehat{OCA} برابر است با:



- ۱ 58° ۲ 60°
 ۳ 64° ۴ 32°

۲ در چه صورت در یک مثلث نقطه هم‌رسی نیمسازها بیرون مثلث است؟

- ۱ مثلث دارای زاویه باز باشد ۲ مثلث دارای زاویه قائمه باشد ۳ تمام زوایای مثلث تند باشد ۴ چنین چیزی ممکن نیست

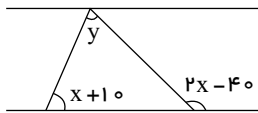
۳ در مثلث متساوی‌الساقین ABC نیمساز CD از زاویه C برابر با قاعده BC است. اندازه زاویه CDA چقدر است؟

- ۱ 90° ۲ 100° ۳ 108° ۴ 120°

۴ کدام گزینه همواره درست است؟

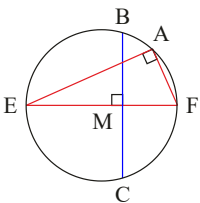
- ۱ اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.
 ۲ اگر در یک چهارضلعی ضلع‌ها برابر باشند چهارضلعی مربع است.
 ۳ اگر در یک چهارضلعی قطرها باهم برابر باشند چهارضلعی مربع است.
 ۴ اگر در یک چهارضلعی قطرها برهم عمود باشند چهارضلعی لوزی است.

۵ زاویه مشخص شده در شکل (y) برابر است با:



- ۱ $3x - 40$ ۲ $2x - 30$
 ۳ $x - 20$ ۴ $x - 50$

۶ در دایره مقابل وتر EF عمودمنصف وتر BC است و آن را در M قطع می‌کند. بین M و B نقطه دلخواه D را در نظر می‌گیریم و ED را امتداد می‌دهیم تا دایره را در A قطع کند. در این صورت کدام گزینه نیز نادرست است؟



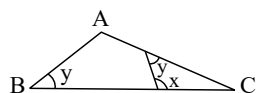
- ۱ $\hat{A} = 90^\circ$ ۲ $\triangle EDM \sim \triangle EFA$
 ۳ $\hat{AFE} = \hat{MDE}$ ۴ $\frac{EF}{EF} = \frac{ME}{AF}$

۷ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{48}{27}$ باشد، نسبت محیط‌های آنها کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{4}{3}$ ۳ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴ $\frac{48}{27}$

۸ با کدام یک از سه طول داده شده نمی‌توان یک مثلث ساخت؟ ($1 < a < b$)

- ۱ $5a, 3a, 2a$ ۲ $6a, 4a, 3a$ ۳ $a + b - 1, b, a$ ۴ $b + 1, a + 2b, a + b$

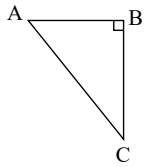


۹ باتوجه به شکل زیر $\frac{A}{B}$ کدام گزینه است؟

- ۱ $\frac{x}{180 - (x + y)}$ ۲ $\frac{3y}{180 - x}$ ۳ $\frac{180 - (x + y)}{x}$ ۴ $\frac{180 - (x - y)}{y}$



۱۰ اگر شخصی بخواهد از نقطه A به نقطه B و سپس به نقطه C برود، به اندازه $\frac{BC}{2}$ مسافت بیشتری طی می‌کند، نسبت به زمانی که مستقیماً از A به C برود. نسبت $\frac{AB}{BC}$ کدام است؟



۴
۵ (۴)

۳
۵ (۳)

۴
۳ (۲)

۳
۴ (۱)

۱۱ مثلث ABC با مختصات $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ با مثلث DEF متشابه است. اگر $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند

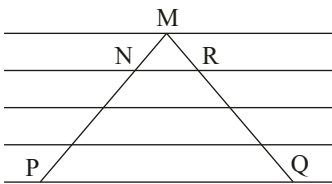
مختصات F کدام است؟

$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۱)



۱۲ اگر در شکل زیر، تمام خطوط باهم موازی و با فاصله‌های مساوی باشند، کدام گزینه درست نیست؟

$\frac{MN}{MR} = \frac{NP}{RQ}$ (۲)

$\frac{MN}{NP} = \frac{MR}{RQ}$ (۱)

$\frac{MR}{MQ} = \frac{NR}{PQ}$ (۴)

$\frac{MN}{NP} = \frac{NR}{PQ}$ (۳)

۱۳ چند تا از جمله‌های زیر نادرست است؟

الف) مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های آن قائمه باشد.

ب) در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

ج) در هر متوازی‌الاضلاع قطرها برابرند.

د) در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل با هم برابر هستند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴ از نقطه برخورد میانه‌های مثلث خطی موازی یک ضلع مثلث رسم می‌نماییم. این خط سطح مثلث را به دو بخش تقسیم می‌نماید نسبت مساحت این

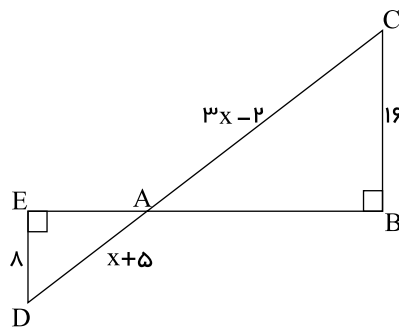
دو بخش برابر کدام یک از اعداد زیر است؟

۴
۵ (۴)

۴
۹ (۳)

۳
۵ (۲)

۲
۳ (۱)



۱۵ دو مثلث ABC و ADE متشابه هستند. با توجه به اطلاعات روی شکل، محیط مثلث ABC چقدر

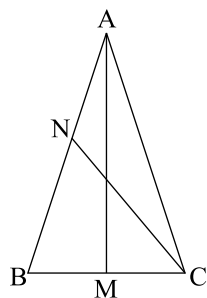
است؟ ($BC = 16$ و $DE = 8$ و $AD = x + 5$ و $AC = 3x - 2$)

۴۰ (۱)

۴۸ (۲)

۶۰ (۳)

۸۰ (۴)



۱۶ در شکل زیر، طول میانه‌های $AM = 9$ و $CN = 7.5$ می‌باشد و ضلع $BC = 8$ است. مساحت مثلث ABC چقدر

است؟

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۱۷ برای اثبات مسئله زیر از کدام حالت هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌توان استفاده کرد؟

«ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو سر آن به یک فاصله است.»

وتر و یک ضلع قائم (۴)

وتر و یک زاویه تند (۳)

سه زاویه (۲)

دو ضلع و زاویه بین (۱)



۱۸) چه تعداد از عبارتهای زیر، درست است؟

الف) هر دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با هم متشابهند.

ب) هر مجموعه حداقل دو زیرمجموعه دارد.

ج) عدد $\frac{3}{14}$ ، یک عدد گنگ است.

د) حاصل جمع دو عدد گنگ، می تواند عددی گویا باشد.

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۱

۱۹) کدام گزینه همواره درست است؟

۱) دو مثلث متساوی الساقین که یک میانه برابر دارند، هم نهشت هستند.

۳) دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشت هستند.

۲۰) برای کدام یک از موارد زیر نمی توانیم مثال نقض بیاوریم؟

۱) در هر مستطیل هر قطر، نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است.

۳) محل برخورد عمود منصف های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد.

۲) دو مثلث قائم الزاویه که دو ضلع برابر دارند، هم نهشت هستند.

۴) دو مثلث متساوی الاضلاع که یک ارتفاع برابر دارند، هم نهشت هستند.

۲) در هر متوازی الاضلاع قطرها باهم برابر هستند.

۴) در مثلث متساوی الاضلاع هر میانه نیمساز نیز هست.

پاسخنامه تشریحی

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر 180° است داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\widehat{OB} = \widehat{OC} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 58^\circ \Rightarrow \widehat{COB} = 180 - 2 \times 58 = 64^\circ \Rightarrow \widehat{COA} = 180 - 64 = 116^\circ$$

$$\widehat{OA} = \widehat{OC} \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = y$$

$$\widehat{OAC} : y + y + 116 = 180 \Rightarrow 2y = 64 \Rightarrow \boxed{y = 32}$$

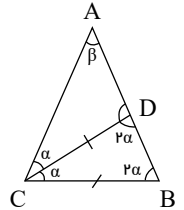
نکته: محل برخورد نیمسازها همواره داخل مثلث است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

در مثلث CDB زیر داریم: با توجه به اینکه زاویه C به وسیله نیمساز CD به دو زاویه مساوی تقسیم شده داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180 \xrightarrow{\Delta\alpha=180} \alpha = 36^\circ$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 2\alpha = 72^\circ$$

$$\widehat{A} = 180 - (2 \times 72) = 36^\circ$$



$$\angle CDA = 180 - (\widehat{CAD} + \widehat{DCA}) \Rightarrow \angle CDA = 180 - (36^\circ + 36^\circ) = 108^\circ$$

زیرا این متوازی الاضلاع اگر اضلاع برابر داشته باشد، مربع یا لوزی است و اگر اضلاع دوهو برابر داشته باشد، که مستطیل یا خود متوازی الاضلاع است که در هر صورت قطرها یکدیگر را نصف می کنند و همواره درست است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

اندازه زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است، بنابراین: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$2x - 40 = y + x + 10 \Rightarrow y = 2x - 40 - x - 10 \Rightarrow y = x - 50$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

نکته ۱: هر خطی که عمود منصف وتری از دایره باشد از مرکز می گذرد.

نکته ۲: زاویه محاطی مقابل به قطر دایره قائمه است.

با توجه به نکته بالا EF قطر دایره $\widehat{A} = 90^\circ$ درجه است و دو مثلث EMD و AEF به حالت دو زاویه $\widehat{M} = \widehat{A} = 90^\circ$ و مشترک $\widehat{E} = \widehat{E}$ متشابه هستند و تنها گزینۀ غلط گزینۀ ۴ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{نسبت محیط} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{9 \times 3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

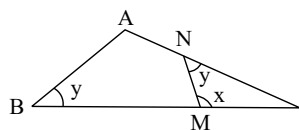
نکته:

$$\text{نسبت مساحت} = \sqrt{\text{نسبت تشابه}} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \sqrt{\text{نسبت مساحت}}$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{4}{3} = \text{نسبت مساحت}$$

۸ قضیه حمار: در هر مثلث مجموع اندازه‌های دو ضلع مثلث از اندازه ضلع سوم مثلث بیشتر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

طبق قضیه حمار مجموع دو ضلع $3a$ و $2a$ برابر است با $5a$ و از ضلع سوم بزرگ تر نیست برابر است، پس با $3a$ ، $2a$ و $5a$ نمی توان مثلث ساخت. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹



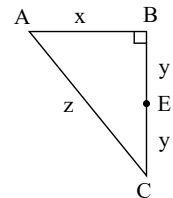
با توجه به اینکه دو مثلث MNC و ABC دو زاویه برابر دارند یعنی \widehat{C} در هر دو مشترک $\widehat{B} = \widehat{N} = y$ ، زاویه سوم آنها هم باهم برابر است، پس $\widehat{A} = x$ است، اکنون با توجه به اینکه $\widehat{A} = x$ است پس $\widehat{C} = 180 - (x + y)$ برابر:

$$\frac{\widehat{A}}{\widehat{C}} = \frac{x}{180 - (x + y)}$$

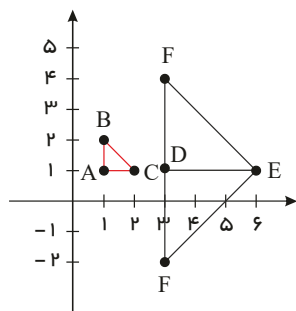
$$\left. \begin{aligned} \text{به توان ۲} \\ x + y = z \longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = z^2 \\ \text{طبق فرض} \\ z^2 = x^2 + (2y)^2 \longrightarrow z^2 = x^2 + 4y^2 \\ \text{طبق فیثاغورس} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{طرفین تقسیم بر } y \longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + 4y^2 \longrightarrow 2xy = 3y^2 \longrightarrow 2x = 3y$$

$$\text{طرفین تقسیم بر } y \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x}{2y} = \frac{3}{4}$$



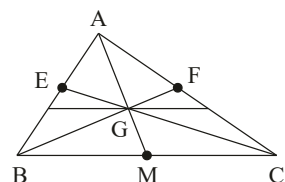
مطابق شکل یا $F = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و یا $F = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ است.



۱۲ با توجه به تشابه مثلث‌ها همه گزینه‌ها درست هستند به جز گزینه ۳. یعنی: $MQ \neq \frac{MN}{NP} \neq \frac{NR}{PQ}$

۱۳ گزینه ج نادرست است و بقیه گزینه‌ها درست است، در متوازی‌الاضلاع یکی از قطر‌ها از دیگری کوچک‌تر است.

۱۴ در هر مثلث میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.



$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GF} = \frac{CG}{GE} = \frac{2}{1}$$

$$AM = AG + GM = 2 + 1 \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{4}{9} S_{ABC} \Rightarrow S_{EFGD} = \frac{5}{9} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{EFCB}} = \frac{4}{5}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x+5}{3x-2} = \frac{8}{16} \Rightarrow \frac{x+5}{3x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x - 2 = 2x + 10 \Rightarrow x = 12$$

$$AC = 3x - 2 = 3(12) - 2 = 36 - 2 = 34$$

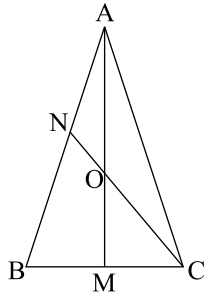
$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} \Rightarrow AB = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{900} = 30$$

$$\text{محیط } \triangle ABC = AC + BC + AB = 34 + 16 + 30 = 80$$

یاد بگیریم:

برای نوشتن اضلاع متناسب از زاویه برابر کمک می‌گیریم. اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های برابر متناسب‌اند.

۱۶ نکته: در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را با نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.



$$\frac{OC}{NO} = 2 \Rightarrow \frac{OC}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow OC = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5$$

$$\frac{AO}{OM} = 2 \Rightarrow \frac{AO}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$$

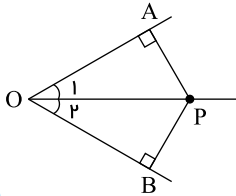
$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \times 9 = 3, \quad BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

در مثلث OMC داریم:

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow OC^2 = OM^2 + MC^2 \Rightarrow \angle M = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع } AM, \text{ قاعده } BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2} \Rightarrow \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

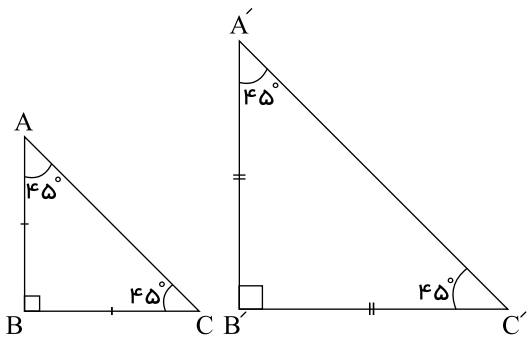
برای اثبات این مسئله داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OP = OP \text{ ضلع مشترک} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \triangle OAP \cong \triangle OPB \Rightarrow AP = PB$$

بررسی گزینه‌ها: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

الف) درست است. دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با هم متشابه‌اند، چون دارای دو زاویه مساوی هستند که زوایای تند 45° درجه خواهند بود و می‌دانیم اگر دو مثلث دو زاویه برابر داشته باشند، با هم متشابه‌اند.



ب) درست است. چون مجموعه تهی که هیچ عضوی ندارد و فقط یک زیرمجموعه که همان تهی باشد را دارد. برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌ها می‌توانیم از 2^n ($n =$ تعداد عضوی مجموعه) استفاده کنیم.

ج) درست نیست. چون $\frac{314}{100} = 3.14$ یک عدد گویا است، ولی π عدد گنگ است.

د) درست است. چون در سؤال گفته است «می‌تواند» برای مثال: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ نکته:

۱- دو مثلث اگر دارای: ۱- دو زاویه برابر ۲- دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی ۳- سه ضلع متناسب باشند، متشابه می‌باشند.

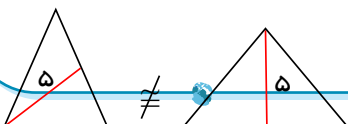
۲- برای پیدا کردن زیرمجموعه‌ها از فرمول 2^n استفاده می‌شود که n تعداد عضوی مجموعه است.

۱۹ **۱ ۲ ۳ ۴** چون مثلث متساوی‌الاضلاع، یک سه‌ضلعی منتظم است و تمام ارتفاع‌های آن با هم برابر هستند، در صورت داشتن یک ارتفاع برابر بین دو مثلث، هر سه ارتفاع دو

مثلث با هم برابر و در نتیجه دو مثلث با هم، هم‌نهشت هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها: برای گزینه‌های ۱ تا ۳ مثال نقض می‌آوریم.

گزینه ۱: دو میانه برابر دارند اما با هم هم‌نهشت نیستند.



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴