



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

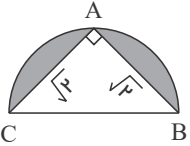


نام آزمون: ریاضی نهم فصل هشتم تستی

تاریخ آزمون:



۱) حجم حاصل از دوران قسمت هاشورخورده حول BC کدام است؟



۸π (۴)

$\frac{2}{3}\pi$ (۳)

π (۲)

$\frac{4}{3}\pi$ (۱)

۲) مکعبی به قطر $\sqrt{12}$ را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟

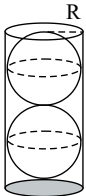
۴π (۴)

$3\sqrt{2}\pi$ (۳)

$\sqrt{2}\pi$ (۲)

۱۶π (۱)

۳) در شکل زیر درون ظرف استوانه‌ای شکل به شعاع R دو کره محاط کرده‌ایم. کدام گزینه درست است؟



(۲) حجم فضای خالی کمتر از حجم هر کره است.

(۱) حجم فضای خالی بیشتر از حجم هر کره است.

(۴) حجم دو کره مساوی حجم استوانه است.

(۳) حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.

۴) مساحت کل یک نیم کره توپر 27π است. حجم این نیم کره کدام است؟

۴۵π (۴)

$36\sqrt{3}\pi$ (۳)

۱۸π (۲)

۲۷π (۱)

۵) قاعده یک هرم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ است. اگر ارتفاع آن $10\sqrt{3}$ باشد حجم هرم کدام است؟

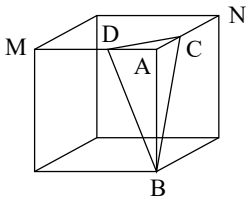
۲۴۰ (۴)

$720\sqrt{3}$ (۳)

۷۲۰ (۲)

$24\sqrt{3}$ (۱)

۶) در مکعب زیر نقطه C وسط AN و نقطه D وسط AM است. اگر $AB = 1$ باشد، حجم هرم $ABCD$ کدام است؟



$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

$\frac{1}{24}$ (۴)

$\frac{1}{18}$ (۳)

۷) ستونی به شکل منشور ۵ پهلو است که هر ضلع قاعده‌اش ۰٫۵ متر و ارتفاع آن ۲۰ متر است. می‌خواهیم به بدنه این ستون کاشی بچسبانیم، چند متر مربع کاشی لازم است؟

۲۰ (۴)

۴۰ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۸) اگر بخواهیم با مقوا، مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ درست کنیم، چند سانتی‌متر مقوا نیاز داریم؟

۹۴ (۴)

۵۴ (۳)

۱۲۰ (۲)

۶۸ (۱)

۹) نسبت عدد حجم به مساحت کل مکعبی برابر با ۱ می‌باشد، مساحت جانبی این مکعب کدام است؟

۲۱۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

۱۰) حجم کره‌ای به شعاع R چند برابر حجم مخروطی به شعاع R و ارتفاع $3R$ است؟

$\frac{4}{9}\pi$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{4}{3}\pi$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)





۱۱) اتاقی داریم به شکل منشور، با قاعده شش ضلعی منتظم، اگر از نقطه‌ای روی سقف اتاق، شش نخ به رأس‌های کف اتاق وصل کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

- ① $\frac{1}{3}$ برابر ② $\frac{1}{4}$ برابر ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ برابر

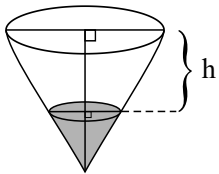
۱۲) یک هرم منتظم با قاعده چهارضلعی و مساحت قاعده ۳۶ سانتی‌متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی‌متر مربع است؟

- ① ۱۵ ② ۳۰ ③ ۶۰ ④ ۱۲۰

۱۳) بزرگ‌ترین هرمی که می‌تواند به‌طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می‌توان درون این استخر ساخت؟

- ① یکی ② دو تا ③ سه تا ④ چهار تا

۱۴) مخزنی به شکل مخروط واژگون‌شده حاوی مایع مخصوصی است. مقدار h که برابر با فضای خالی بالای مایع است، توسط فرمول $h = 21 - \frac{7}{2}r$ بر حسب متر محاسبه می‌گردد. r در فرمول مذکور برابر با شعاع مایع بر حسب متر است. محیط قاعده دایره‌ای شکل مخزن برابر است با:

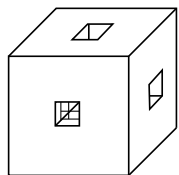


- ① 9π ② 12π ③ 15π ④ 18π

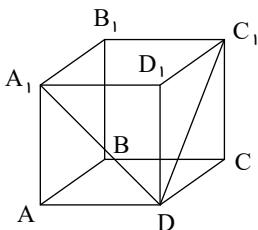
۱۵) هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع 10cm می‌باشد. اگر مساحت کل این هرم ۳۶۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

- ① ۲۶۰ ② ۳۶۰ ③ ۴۴۰ ④ ۴۰۰

۱۶) مکعبی به ضلع 3m همانطور که در شکل معلوم است دارای سوراخ مربعی شکل به ضلع ۱ در وسط هر وجه است. سه سوراخ در وسط مکعب طوری بر خورد می‌کنند که مکعبی در وسط مکعب ایجاد می‌شود. مساحت کل مکعب به مترمربع برابر است با:



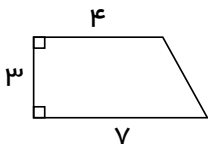
- ① ۷۲ ② ۷۶ ③ ۷۸ ④ ۸۰



۱۷) زاویه بین دو قطر A_1D و DC_1 از مکعب $ABCD A_1B_1C_1D_1$ چقدر است؟

- ① 60° ② 80° ③ 45° ④ 75°

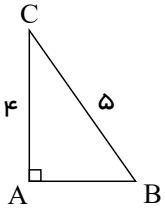
۱۸) اگر یک دوزنقه قائم‌الزاویه را با اندازه اضلاع مشخص شده در شکل زیر، حول قاعده کوچک‌تر دوران دهیم، حجم شکل حاصل را به دست آورید.



- ① 36π ② 45π ③ 54π ④ 60π



۱۹) شکل زیر را یک بار حول ضلع AB و بار دیگر حول ضلع AC دوران می‌دهیم. اختلاف حجم دو مخروط حاصل کدام است؟



6π (۲)

4π (۱)

8π (۴)

2π (۳)

۲۰) یک مخروط را با یک صفحه که بر وسط ارتفاع مخروط عمود است، به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نسبت حجم مخروط کوچک بالا به حجم مخروط

ناقص برابر است با:

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{7}$ (۳)

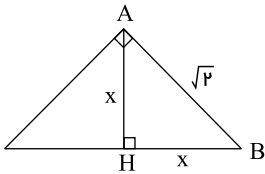
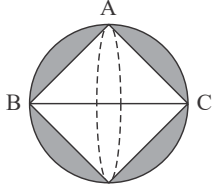
$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

از دوران شکل حول BC یک کره که در داخل آن دو مخروط که از قاعده به هم متصل هستند، کم شده است.



برای به دست آوردن حجم حاصل از قسمت هاشورخورده، حول BC کافیتست حجم کره را منهای حجم دو مخروط ایجاد شده کنیم.

با توجه به رابطه فیثاغورس:

$$AH^2 + BH^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس شعاع کره و شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۱ است.

$$V_{\text{کره}} - V_{\text{مخروط}} = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

نکته: قطر مکعب به ضلع a از رابطه $\sqrt{3}a$ به دست می‌آید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\Rightarrow \sqrt{3}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

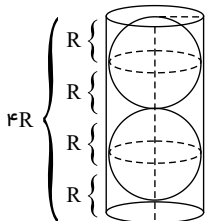
ضلع مکعب محاط شده در درون استوانه برابر ۲ است.

در نتیجه قطر قاعده این استوانه برابر قطر مربع (وجه بالایی مکعب) است.

$$\text{شعاع قاعده استوانه} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر قاعده استوانه} = 2\sqrt{2} = \text{قطر مربع}$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi(\sqrt{2})^2 \times 2 = 4\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳



برای پاسخ به این سؤال ابتدا حجم فضای خالی بین استوانه و کره‌ها را به دست می‌آوریم (برحسب R). شعاع هر کره برابر R ، شعاع قاعده استوانه برابر R و ارتفاع آن برابر $4R$ است.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi R^2 4R = 4\pi R^3$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{دو کره } V = 2 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$$



V کره‌ها - V استوانه = حجم فضای خالی بین کره و استوانه

$$= 4\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{12}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$$

پس حجم فضای خالی برابر حجم یک کره است.

1 2 3 4 4

مساحت کل یک نیم کره برابر با مساحت نصف کره به علاوه مساحت دایره زیرین آن است.



مساحت دایره زیرین + مساحت نصف کره = مساحت کل نیم کره

$$= \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$3\pi r^2 = 27\pi \rightarrow 3r^2 = 27 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

حال مساحت کل نیم کره را برابر 27π قرار می‌دهیم.

حال حجم نیم کره را به دست می‌آوریم:

$$V \text{ نیم کره} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 = 18\pi$$

1 2 3 4 5

شش ضلعی منتظم به ضلع a از 6 مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است.



مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است.

حال با 6 برابر کردن آن داریم:

نکته: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ است.

برای این سؤال: $\frac{3 \times 4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ مساحت شش ضلعی منتظم

حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

$$V \text{ هرم} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 10\sqrt{3} = 240$$

1 2 3 4 6

برای به دست آوردن حجم هرم، اگر مثلث DAC را قاعده در نظر بگیریم با توجه به اینکه $AD = AC$ و هر کدام نصف وجه‌های مکعب هستند مساحت قاعده از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\text{مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{\text{ارتفاع} \times S \text{ قاعده}}{3} = \frac{\frac{1}{8} \times 1}{3} = \frac{1}{24}$$

هنگامی که می‌گوید منشور 5 پهلو یعنی قاعده آن 5 ضلعی منتظم است و منشور قائم است. پس داریم:

$$5 \times (0.5 \times 20) = 5 \times 10 = 50(m)^2$$

1 2 3 4 7

نکته: مساحت کل مکعب مستطیلی با ابعاد a , b و c برابر است با:

$$\text{مساحت کل} = 2(ab + ac + bc)$$

در واقع سؤال از ما مساحت کل مکعب را می‌خواهد:

$$2 \times (3 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 5) = 2 \times (12 + 20 + 15) = 2 \times 47 = 94$$

علت ضرب در 2 بالا مشخص است، زیرا از هر نوع مستطیل دو تا داریم.

با توجه به اینکه مساحت کل مکعب بر ضلع a برابر $6a^2$ و حجم مکعب به ضلع a برابر a^3 است، پس:

1 2 3 4 9

$$\frac{6a^2}{a^3} = 1 \Rightarrow \frac{6}{a} = 1 \Rightarrow a = 6$$

مساحت جانبی مکعب به ضلع a برابر $4a^2$ است.

$$\Rightarrow 4 \times 6^2 = 144$$



نسبت حجم کره به مخروط را محاسبه می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^3} = \frac{4}{3}$$

پس حجم کره به شعاع R ، برابر حجم مخروط به شعاع R و ارتفاع $3R$ است.

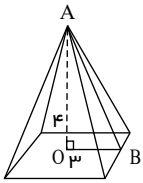
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم منشور} = sh \\ \text{حجم هرم} = \frac{1}{3}sh \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{حجم هرم}}{\text{حجم منشور}} = \frac{\frac{1}{3}sh}{sh} = \frac{1}{3}$$

هرم منتظم با قاعده چهارضلعی، همان هرم منتظم با قاعده مربع است، با توجه به اینکه مساحت قاعده این هرم برابر ۳۶ است، پس ضلع مربع برابر ۶ است، **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲**

$OB = 3$ به اندازه نصف ضلع مربع است، پس:

حال رابطه فیثاغورس را برای مثلث AOB می‌نویسیم:



$$AO^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

حال مساحت وجه جانبی (مثلث) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5 \times 6}{2} = 15$$

چون وجه‌های جانبی این هرم از چهار مثلث هم‌نهشت تشکیل شده، پس:

$$15 \times 4 = 60$$

بزرگ‌ترین هرمی که در داخل استخر قرار می‌گیرد، هرمی با قاعده مستطیل شکل به ابعاد ۲۰ و ۱۲ و ارتفاع ۴ متر است. چون حجم هرم، $\frac{1}{3}$ حجم منشور با **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳**

قاعده مساوی با آن است، بنابراین از این نوع هرم نیز ۳ تا داخل استخر جای می‌گیرد.

اگر $h = 0$ باشد یعنی تمام مخزن از مایع پر شده است: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴**

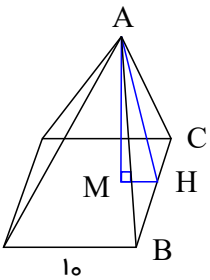
$$21 - \frac{V}{2} = 0$$

$$\frac{V}{2} = 21 \Rightarrow r = 6m$$

$$\text{محیط قاعده} = 2\pi r = 2 \times 6 \times \pi = 12\pi$$

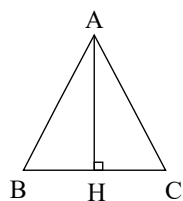
مساحت کل این هرم شامل ۴ مثلث متساوی‌الساقین و یک مربع است. مساحت مربع برابر است با $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$ بنابراین مساحت ۴ مثلث اطراف **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

برابر است با:



$$360 - 100 = 260 \text{ cm}^2$$

مساحت هر کدام از مثلث‌ها، مساوی است با: $260 \div 4 = 65 \text{ cm}^2$



$$\text{ارتفاع وجه} \triangle ABC = 65 = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$\rightarrow 65 = \frac{5}{2} \times \frac{AH}{1} \rightarrow AH = 13 \text{ cm}$$

طبق شکل AH ارتفاع وجه برابر ۱۳ سانتی متر، MH نصف ضلع برابر ۵ cm است. بنابراین می‌توان از رابطه ی فیثاغورس (MA) ارتفاع هرم را یافت.

$$13^2 = 5^2 + MA^2 \rightarrow MA^2 = 144 \rightarrow MA = 12$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} a^2 \times b = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 12 = 400 \text{ cm}^3$$

مساحت بیرونی هر وجه مکعب برابر است با: $9 \times 3 \times 3 = 9$ اما یک مربع 1×1 از آن کم می‌شود $9 - 1 = 8 \text{ cm}^2$ پس مساحت ۶ وجه مکعب برابر است با: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**



$$6 \times 8 = 48m^2$$

از هر وجه یک سوراخ مربع شکل ایجاد شده و دور تا دور این سوراخ ۴ مربع 1×1 وجود دارد.

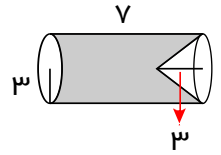
$$4 \times 6 \times 1 \times 1 = 24$$

$$\text{مساحت کل} = 48 + 24 = 72$$

توجه کنید که مثلث A_1DC_1 متساوی الاضلاع است. 1 2 3 4 17

شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۷ است که یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ از آن کم شده است. 1 2 3 4 18

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi \\ V_{\text{مخروط}} &= \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi \end{aligned} \right\}$$



$$\rightarrow V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = 63\pi - 9\pi = 54\pi$$

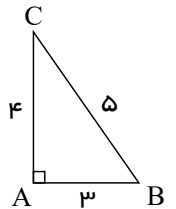
1 2 3 4 19

$$AB^2 = 5^2 - 4^2 \rightarrow AB^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

دوران حول ضلع AB یعنی مخروطی به ارتفاع $3cm$ و شعاع $4cm$ است.

ارتفاع \times مساحت قاعده $=$ حجم

$$V_1 = \frac{1}{3} \times (\pi \times 4^2) \times 3 = \frac{1}{3} \pi \times 16 \times 3 = 16\pi$$



دوران حول ضلع AC یعنی مخروطی به ارتفاع $4cm$ و شعاع $3cm$ است.

$$V_2 = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

$$V_1 - V_2 = 16\pi - 12\pi = 4\pi$$

مخروط توسط یک صفحه به موازات صفحه قاعده قطع شده است پس در مخروط متشابه داریم نسبت حجم مخروط حاصل به مخروط اولیه برابر است با مکعب 1 2 3 4 20

نسبت تشابه که همان مکعب نسبت ارتفاعها است. پس اگر V' حجم مخروط حاصل و V حجم مخروط اولیه باشد داریم:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V'}{V - V'} = \frac{1}{8 - 1} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{7}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴