نام و نام خانوادگی: 	زمان برگزاری: ۳۰دقیقه

نام آزمون: هندسه -تالس و تشابه(تستی)

تاریخ آزمون: 	سید بهروز پرتوی

۱) در یک ذوزنقه، پاره خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه، کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۶}$ (۲) $\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۲}{۵}$

۲) دو نقطه‌ی A و B و خط d داده شده‌اند. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیم که رأسش روی d و قاعده‌ی آن پاره‌خط AB باشد، باتوجه به اوضاع A، B و d، تعداد جواب‌های ممکن برای رسم مثلث کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) یک جواب (۲) دو جواب (۳) هیچ جواب (۴) بی‌شمار جواب

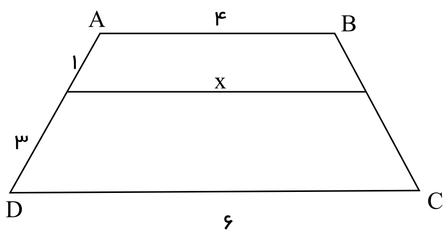
۳) نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چند سانتی‌متر است؟

(۱) $۲۱\sqrt{۲}$ (۲) $۲۱\sqrt{۳}$ (۳) $۲۴\sqrt{۲}$ (۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۴) طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، ۲۲٫۵ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم کدام است؟

(۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۲٫۵ (۳) ۱۰۳ (۴) ۱۰۳٫۵

۵) در ذوزنقهٔ شکل مقابل x کدام است؟



(۱) ۵ (۲) ۵٫۵ (۳) ۴٫۵ (۴) $۴\frac{۲}{۳}$

۶) در مثلث ABC وسط‌های سه ضلع را M، N، F و محل تلاقی عمودمنصف‌ها را O می‌نامیم. نقطهٔ O همواره برای مثلث MNF چه نقطه‌ای است؟

(۱) محل همرسی عمودمنصف‌ها (۲) محل همرسی میانه‌ها (۳) محل همرسی ارتفاع‌ها (۴) محل همرسی نیمسازهای داخلی

۷) کدام مورد مثال نقض دارد؟

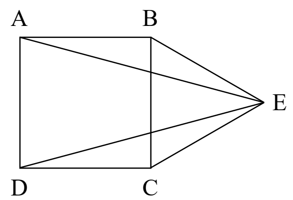
(۱) عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند.

(۲) چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

(۳) در حالت کلی تعداد نقاط برخورد دو ضلع موازی با دایره، پنج حالت مختلف می‌تواند داشته باشد.

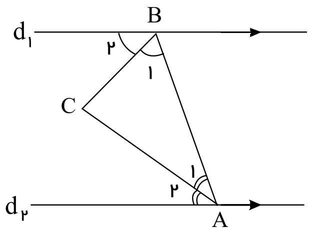
(۴) مربع چهارضلعی است که قطرهایش هم‌اندازه و عمود برهم باشند.

۸) مربع $ABCD$ و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC در شکل داده شده‌اند. زاویهٔ DEA چقدر است؟



(۱) ۱۵° (۲) ۲۰° (۳) ۳۰° (۴) ۴۵°

۹) دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ دو نقطهٔ A و B روی آن مفروض‌اند. اگر $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$، اندازهٔ $\hat{C}$ چند درجه است؟

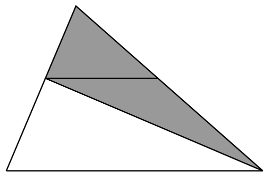


۱) ۷۵
۲) ۶۰
۳) ۹۰
۴) ۴۵

۱۰) در مثلث ABC، داریم: $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و $\hat{B} = ۴۰^\circ$. اگر نیمساز داخلی زاویهٔ C، عمودمنصف ضلع BC را درنقطهٔ D قطع کند، آن‌گاه BD زاویهٔ B را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۱) در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۲) دو دایره به مرکزهای A و B ، یکدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. چند نقطه مانند M روی پاره‌خط AB می‌توان یافت به گونه‌ای که $MC = MD$ باشد؟

۱) بیشمار ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۳) خط d و نقاط A و B در یک صفحه مفروض‌اند. در کدام حالت، هیچ نقطه‌ای روی خط d نمی‌توان یافت که از A و B به یک فاصله باشد؟

۱) خط d، پاره‌خط AB را قطع کند و بر آن عمود نباشد. ۲) خط d، موازی پاره‌خط AB باشد.
۳) خط d، امتداد پاره‌خط AB را قطع کند و بر آن عمود باشد. ۴) خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

۱۴) نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB = AC)$ را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۴۸ سانتی‌مترمربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

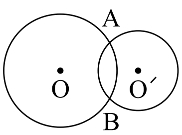
۱۵) در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}\,(AB = AC)$، زاویهٔ بین ارتفاع وارد بر ضلع AC و نیمساز خارجی زاویهٔ C، ۳۵° است. زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

۱۶) مثلثی که طول اضلاع آن ۳ و ۴ و ۶ است. با کدام مثلث به اضلاع داده شده متشابه است؟

۱) ۱ و ۲ و $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۶ و ۸ و ۱۱ ۳) ۹ و ۱۲ و ۱۸ ۴) ۲ و ۳ و ۲

۱۷) مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و B متقاطع می‌باشند. در این صورت لزوماً:



۱) OO' از وسط AB می‌گذرد. ۲) OO' بر AB عمود است.
۳) $O\hat{A}O' = O\hat{B}O'$ ۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۸) دو دایرهٔ C و C'، یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کنند. چند نقطه وجود دارد که داخل هر دو دایره بوده و از نقاط A و B به یک فاصله باشد؟

۱) بی‌شمار ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

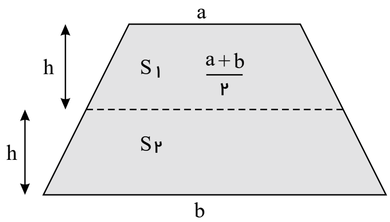
۱۹ اگر برای مقادیر مثبت b, c و a داشته باشیم: $\frac{۵}{a+c}=\frac{۴}{b}=\frac{a}{۳}$ و $b+c=۶$، حاصل $a-b+c$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۲۰ تعداد نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابت P از نقطهٔ A باشند و از نقاط C, B به یک فاصله باشند، کدام است؟

۱) حداقل یکی
۲) حداکثر یکی
۳) حداکثر دو تا
۴) دقیقاً دو

پاسخنامه تشریحی

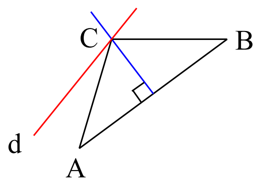


۱ (۴) (۳) (**۲**) (۱) اندازهٔ پاره خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند برابر میانگین دو قاعده است.

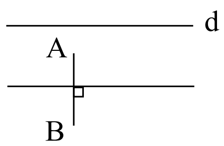
$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{(a+\frac{a+b}{۲})(h)(\frac{۱}{۲})}{(b+\frac{a+b}{۲})(h)(\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{\frac{۳a+b}{۲}}{\frac{۳b+a}{۲}}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۳a+b}{۳b+a}=\frac{۱}{۲}\rightarrow ۶a+۲b=۳b+a\rightarrow ۵a=b$$

یعنی نسبت قاعده‌های ذوزنقه، ۱ به ۵ است.

۲ (۴) (۳) (**۲**) (۱) برای رسم این مثلث کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده و محل برخورد آن با خط d را C بنامیم. در این صورت مثلث ABC جواب مسئله است. در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند مسئله یک جواب دارد.



و اگر عمودمنصف AB با خط d موازی باشد، مسئله جواب ندارد.



و چنانچه عمودمنصف AB بر خط d منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۳ (۴) (**۳**) (۲) (۱)

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۴۹}{۱۲۸}\Rightarrow\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{۷}{۸\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{۲۱}{a_۲}=\frac{۷}{۸\sqrt{۲}}\Rightarrow a_۲=۲۴\sqrt{۲}$$

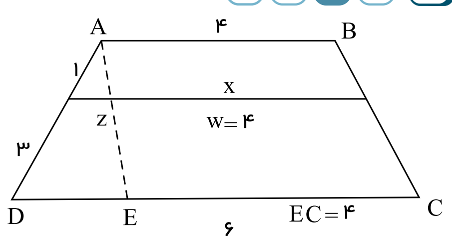
۴ (**۴**) (۳) (۲) (۱) در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع نظیر است.

$$\text{محیط مثلث اول}=۷+۵+۱۱=۲۳$$

$$\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}}=\frac{a}{a'}\Rightarrow\frac{۲۳}{\text{محیط مثلث دوم}}=\frac{۵}{۲۲٫۵}$$

$$\Rightarrow\text{محیط مثلث دوم}=۱۰۳٫۵$$

۵ (۴) (**۳**) (۲) (۱)



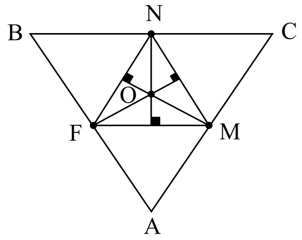
$$x=z+w=?$$

$$DE=۶-۴=۲\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس جزء به کل}}\frac{۱}{۱+۳}=\frac{z}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{z}{۲}\Rightarrow z=۰٫۵$$

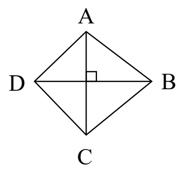
$$\Rightarrow x=z+w=۴+۰٫۵=۴٫۵$$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به کتاب درسی، عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC و ارتفاع‌های مثلث FMN بر هم منطبق‌اند. بنابراین محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC (نقطهٔ O)، محل همرسی ارتفاع‌های مثلث MNF است.



۷ ۱ ۲ ۳ **۴** باید عنوان می‌شد مربع چهارضلعی است که قطرهایش هم‌اندازه و عمودمنصف یکدیگرند. زیرا در غیر این صورت می‌توان شکل زیر را رسم کرد:



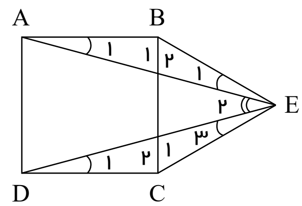
$AC = BD \ , \ \ AC \perp BD$

۸ ۱ ۲ **۳** ۴ در مثلث ABE داریم:

$\widehat{B} = \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$

$AB = BE \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{E}_۱ = ۱۵^\circ$

در مثلث DCE :

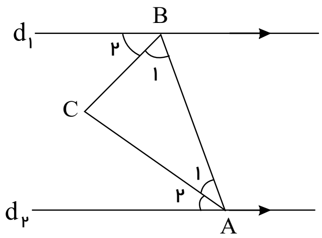


$\widehat{C} = \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$

$CD = CE \Rightarrow \widehat{D}_۱ = \widehat{E}_۳ = ۱۵^\circ$

$\widehat{E}_۲ = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$

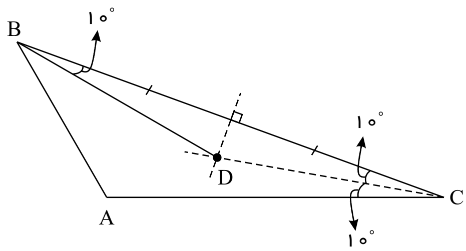
۹ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به اینکه $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \dfrac{\hat{A}}{۲}$ و $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \dfrac{\hat{B}}{۲}$، داریم:



$$\left.\begin{array}{r} d_۱ || d_۲ \\ \text{مورب } AB \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ \to \hat{C} = ۹۰^\circ$$

۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به فرض مسئله داریم: $\hat{A} = ۱۲۰^\circ \ , \ \hat{B} = ۴۰^\circ \to \hat{C} = ۲۰^\circ$

حال از آن‌جایی که نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ C و عمودمنصف BC قرار دارد، پس:

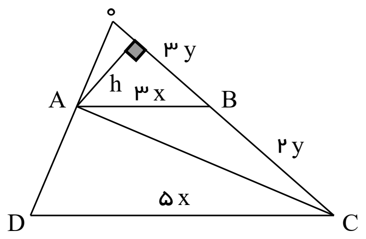


$$\begin{cases} B\hat{C}D = A\hat{C}D = ۱۰^\circ \\ BD = CD \end{cases} \to D\hat{B}C = ۱۰^\circ \to A\hat{B}D = ۴۰^\circ - ۱۰^\circ = ۳۰^\circ$$

در نتیجه:

$$\frac{D\hat{B}C}{A\hat{B}D} = \frac{۱۰^\circ}{۳۰^\circ} = \frac{۱}{۳}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$AB||DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{DC}=\frac{OB}{OC}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\begin{cases}OB=۳y\\OC=۵y\end{cases}$$

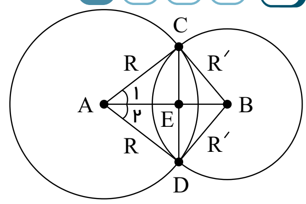
از طرفی مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع یکسان h دارند پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}S_{\overset{\Delta}{OAB}}=۳S\\S_{\overset{\Delta}{ABC}}\ ۲S=\frac{۱}{۲}\times ۳x\times h\Rightarrow xh=\frac{۴S}{۳}\end{cases}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۸x}{۲}\times h=۴xh=۴\times\frac{۴s}{۳}=\frac{۱۶s}{۳}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAC}}}{S_{\text{ذوزنقه}}}=\frac{۵s}{\frac{۱۶s}{۳}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

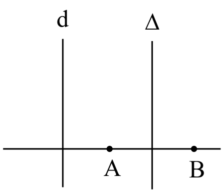
۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴ برای دو مثلث ABC و ABD داریم:



$$\left.\begin{aligned}AC=AD=R\\BC=BD=R'\\AB=AB\end{aligned}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\overset{\text{ض ض ض}}{\cong}\overset{\Delta}{ABD}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$

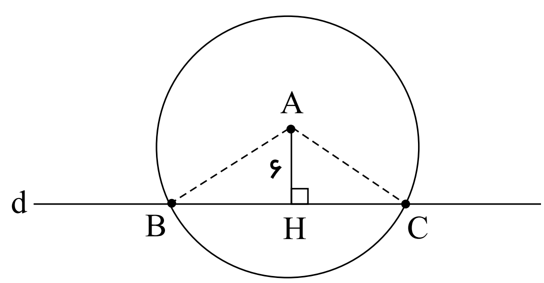
بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ACD، پاره‌خط AE نیمساز است و در نتیجه AE عمود منصف CD می‌باشد. از آن جا که BE هم‌راستا با AE است، پس AB ، عمود منصف CD است و هر نقطه مانند M روی این پاره‌خط از C و D به یک فاصله است یعنی همواره $MC=MD$.

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴ مجموعه نقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. واضح است که اگر d بر عمودمنصف AB منطبق باشد، بی‌شمار نقطه روی آن وجود دارد که از A و B به یک فاصله هستند. در صورتی که خط d عمود بر ABعمود بوده ولی بر عمودمنصف AB منطبق نباشد (مطابق شکل) هیچ نقطه‌ای روی d وجود ندارد که به فاصله‌ی مساوی از A و B باشد در سایر حالت‌های خط d، مسأله همواره یک جواب دارد.



۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا یک شکل کلی برای درک بهتر مسأله رسم می‌کنیم. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}(AB=AC)$، نقطهٔ A روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد زیرا از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. حال دایره‌ای را تصور کنید که مرکز آن رأس A بوده و رئوس B و C روی آن قرار داشته باشند. داریم:

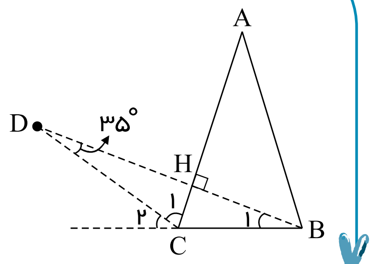
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۶\times BC=۴۸\to ۳BC=۴۸\to BC=۱۶$$



می‌دانیم AH، منصف ضلع BC است، پس $HC=۸$ بوده و داریم:

$$AH^۲+HC^۲=AC^۲\to ۶^۲+۸^۲=AC^۲\to AC=۱۰=AB\to \text{محیط مثلث } ABC=AB+AC+BC=۱۰+۱۰+۱۶=۳۶$$

۱۵ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به شکل زیر که BH ارتفاع وارد بر AC و CD نیمساز خارجی زاویه $\hat{C}$ است، داریم:



در مثلث $C\overset{\Delta}{H}D$ $\begin{cases}\hat{D}=۳۵^\circ\\ \hat{H}=۹۰^\circ\end{cases}$

$\Rightarrow \hat{C}_۱=۵۵^\circ$

از طرفی چون CD نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث است. بنابراین $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ و در نتیجه:

$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۱۰^\circ$ زاویهٔ خارجی مثلث $A\overset{\Delta}{C}B$

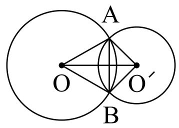
$\Rightarrow$ زاویهٔ داخلی $\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ\Rightarrow \hat{B}=۷۰^\circ\Rightarrow \hat{A}=۴۰^\circ$

۱۶) ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{۳}{۹}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱}{۳}$$

در گزینهٔ ۳ اضلاع نظیر متناسب هستند، پس دو مثلث متشابه‌اند. موارد دیگر این ویژگی را ندارند.

۱۷) ۱ ۲ ۳ **۴**

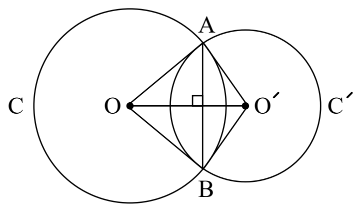


$$\begin{cases}OA=OB=R\Rightarrow AB \ \text{عمودمنصف}\ \text{روی}\ O\\ O'A=O'B=R'\Rightarrow AB\ \text{عمودمنصف}\ \text{روی}\ O'\end{cases}\Rightarrow AB\ \text{عمودمنصف}\ OO'$$

$$\begin{cases}OA=OB=R\\ O'A=O'B=R'\\ OO'\ \text{مشترک}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض ض ض})} O\overset{\Delta}{A}O'\cong O\overset{\Delta}{B}O'\Rightarrow O\widehat{A}O'=O\widehat{B}O'$$

۱۸) **۱** ۲ ۳ ۴

مطابق شکل نقاط A و B روی هر دو دایرهٔ C و C' قرار دارند، بنابراین داریم:



۱) $OA=OB\Rightarrow$ روی عمودمنصف AB است O

۲) $O'A=O'B\Rightarrow$ روی عمودمنصف AB است O'

$(۱),(۲)\Rightarrow$ عمودمنصف AB است OO'

بنابراین هر نقطهٔ واقع بر OO' از جمله نقاطی که داخل هر دو دایره واقع‌اند، از نقاط A و B به یک فاصله قرار دارند و در نتیجه بی‌شمار نقطه با این مشخصات وجود دارد.

۱۹) ۱ ۲ ۳ **۴** یکی از خواص تناسب این است که می‌توانیم صورت‌ها را باهم و مخرج‌ها را باهم جمع کنیم و به کسری برابر با کسر موجود برسیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

حال با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\frac{۴}{b}=\frac{۵}{a+c}=\frac{۹}{a+b+c}\xrightarrow{b+c=۶}\frac{۹}{a+۶}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۳}=\frac{۹}{a+۶}\Rightarrow a^۲+۶a=۲۷\Rightarrow a^۲+۶a-۲۷=۰$$

$$\Rightarrow (a+۹)(a-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۳\ (\text{ق ق})\\ a=-۹\ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{b}=\frac{a}{۳}\overset{a=۳}{=\!=}۱\Rightarrow b=۴$$

$$\frac{۵}{a+c}=\frac{a}{۳}\xrightarrow{a=۳}\frac{۵}{۳+c}=۱\Rightarrow c=۲$$

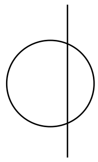
در نتیجه:

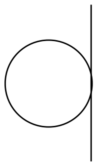
$$a-b+c \xlongequal{a=۲,b=۴bc=۲} ۳-۴+۲=۱$$

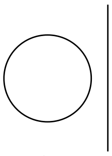
۲۰ (۴) **(۳)** (۲) (۱) در این‌گونه سؤال‌ها ابتدا همهٔ نقاطی را که گفته شد، تک‌تک به دست می‌آوریم؛ سپس اشتراک می‌گیریم.

۱- نقاطی که از A به فاصلهٔ P باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع P است.

۲- نقاطی که از B, C به یک فاصله‌اند، خط عمودمنصف BC است. حال اشتراک یک خط و دایره را بررسی می‌کنیم.


۲ نقطه


۱ نقطه


۰ نقطه

پاسخ‌نامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۲	۶	۳	۱۱	۴	۱۶	۳
۲	۲	۷	۴	۱۲	۱	۱۷	۴
۳	۳	۸	۳	۱۳	۳	۱۸	۱
۴	۴	۹	۳	۱۴	۴	۱۹	۴
۵	۳	۱۰	۲	۱۵	۳	۲۰	۳